Correction du TD du 03/02 :

Exercice 30 :

1) Toujours pareil, $x \mapsto e^{-x-e^{-x}}$ est continue positive donc mesurable positive.
Il reste à calculer son intégrale :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x-e^{-x}}\,dx = \left[-e^{-e^{-x}}\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= 1.$$

On a aussi montré que la fonction de répartition était

$$F(x) = e^{-e^{-x}}$$

2) On doit montrer que l'on converge en loi. Dans la question précédente on a calculé la fonction de répartition de la limite (continue).

L) $\boxed{\text{RÉFLEXE}}$: montrer que

$$F_{M_n - \log(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} F$$

(convergence SIMPLE)

Soit donc $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{P}(M_n - \log(n) \leq x) = \mathbb{P}(M_n \leq x + \log(n))$$

max $\leq$ ssi tt le monde $\leq$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \{X_k \leq x + \log(n)\}\right)$$

i.i.d.

$$= \mathbb{P}(X_1 \leq x + \log(n))^n$$

$$= \left(1 - e^{-x-\log(n)}\right)^n$$

$e^{-\log(n)} = \frac{1}{n}$

$$= \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-e^{-x}}$$

CAR pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{z}$.

On a donc la convergence souhaitée.

Exercice 31 :

1) Convergence en loi + loi normale

↳ $\boxed{\text{RÉFLEXE}}$ théorème de Lévy

↳ on calcule les fct caractéristiques.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi_{\sqrt{n}\frac{(\frac{1}{n}\sum X_k - m)}{\sigma}}(t) = \mathbb{E}\left(e^{it\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\frac{1}{n}\sum X_k - m)}\right)$$

$$= e^{-it\frac{m}{\sigma\sqrt{n}}}\,\mathbb{E}\left(e^{i\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} X_k}\right)$$

$$= e^{-it\frac{m}{\sigma\sqrt{n}}}\,\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} e^{i\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}X_k}\right)$$

indépendance

$$= e^{-it\frac{m}{\sigma\sqrt{n}}}\prod_{k=1}^{n}\varphi_{X_k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

$$= e^{-it\frac{m}{\sigma\sqrt{n}}}\prod_{k=1}^{n} e^{it\frac{m_k}{\sigma\sqrt{n}} - \frac{1}{2}\frac{\sigma_k^2}{\sigma^2}\frac{t^2}{n}}$$

(hypothèse sur (m_k))

$$= \underbrace{e^{it\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(\sum m_k - m)}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}\;\underbrace{e^{-\frac{1}{2}t^2\frac{1}{n\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k}}_{\longrightarrow e^{-t^2/2}}$$

(hyp sur (σ_k))

Ainsi, par le théorème de Lévy :

$$\sqrt{n}\,\frac{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m\right)}{\sigma} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1).$$

2) Non, prendre par exemple

$$m_n = (-1)^n \quad , \quad \sigma_n = 2+(-1)^n.$$